

Metodi Computazionali della Fisica

Secondo Modulo: C++

Terza Lezione



La lezione di oggi

Obiettivo:

- ▶ implementare l'integrazione Monte Carlo per una funzione di una variable;
- ▶ calcolare il baricentro di un solido irregolare;
- ▶ implementare una classe Vegas che fornisca integrale di una funzione di più variabili;

Contenuti:

- ▶ teorema base dell'integrazione Monte Carlo.

Strumenti:

- ▶ le librerie `fstream`;
- ▶ le routine `RAN2`, `VEGAS`.

Leggere/scrivere da/su file

```

#include <fstream>

ofstream function("function.res");

size_t np_plot=100;
for(size_t i=0;i<=np_plot;i++){
    function<<i<<" "<<f(i)<<endl;
};
function.close();

string filename = "mcint-1d.par";
ifstream in;

in.open(filename.data());
if (!in) {
    cerr << "Error: couldn't open file " << filename << endl;
    exit(1);
};

in>>ndim>>sdum;
for(size_t i=0;i<=ndim;i++){
    in>>dum1>>dum2>>sdum;
    xmin.push_back(dum1);
    xmax.push_back(dum2);
};
in.close();

```

Teorema base dell'integrazione Monte Carlo

Preso un insieme di N casuali x_1, \dots, x_N all'interno di un volume multidimensionale V , l'integrale di una funzione f su tale volume è dato da

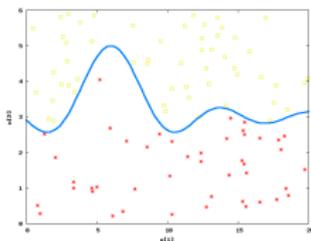
$$\int dV f \simeq V \langle f \rangle \pm V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}}$$

dove

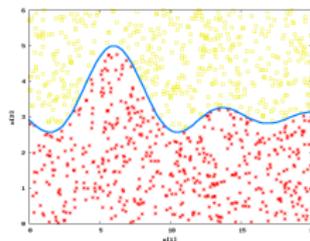
$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad \langle f^2 \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^2(x_i).$$

Un esempio

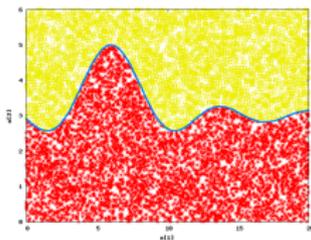
Integrare la funzione $f(x) = \int_0^{20} dx \frac{2 \sin(x-6)}{x-6} + 3$ tra 0 e 20, corrisponde ad integrare la funzione $f(x, y) = \theta(f(x) - y)$ nel rettangolo $[0, 20] \times [0, y_{max}]$ con $y_{max} \geq \max[f(x)]$.



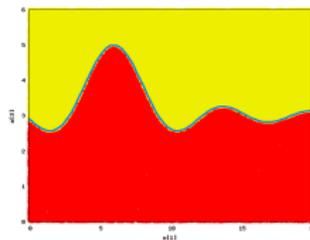
$N = 100: 54.00 \pm 5.97$



$N = 1000: 65.40 \pm 1.89$



$N = 10000: 65.316 \pm 0.598$



$N = 100000: 65.626 \pm 0.189$

Esercizio 1 [NR 7.6]

- ▶ Generalizzare il codice usato per l'integrale di una funzione in una variabile, per calcolare il centro di massa di un solido con densità uniforme e definito da

$$z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3\right)^2 \leq 1, \quad x \geq 1, \quad y \geq -3,$$

ovvero un toro centrato nell'origine con raggio maggiore 4, raggio minore 2 e tagliato dai piani $x = 1$ e $y = -3$.

Caratteristiche

- ▶ Importance sampling: invece di integrare f su un volume uniforme dV , si integra $h = f/g$ su un volume non uniforme gdV , dove g è una funzione che rende h il più possibile costante

$$I = \int dV f = \int dV g \frac{f}{g} = \int gdV h.$$

- ▶ Stratified sampling: l'integrale è il risultato combinato di `itmx` integrazioni indipendenti I_i ognuna con `ncall` chiamate alla funzione integranda

$$I_{best} = \frac{\sum_{i=1}^{itmx} I_i}{\sum_{i=1}^{itmx} \frac{1}{\sigma_i^2}}.$$

Esercizio 2

Implementare una classe che calcoli integrali di funzioni con più variabili utilizzando l'algoritmo Vegas

- ▶ creare la struttura della classe;
- ▶ inserire la routine dei NR;
- ▶ definire una funzione di wrap per la funzione da integrare;
- ▶ testare la classe su funzioni note.